

# 极简量子光学及其在量子计算中的应用

---

钱昱冰

May 21, 2022

北京大学物理学院

## 1. 量子力学和量子光学基本知识

产生、湮灭算符：从谐振子到光子

相干态 (Coherent State)

纠缠 (Entanglement)

## 2. 量子光学的分束器

## 3. 逻辑门

量子逻辑门

逻辑门的量子光学实现

## 4. 其他量子计算实现

# 量子力学和量子光学基本知识

---

## 量子力学和量子光学基本知识

---

产生、湮灭算符：从谐振子到光子

一维谐振子的哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

定义

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{ip}{m\omega} \right)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

- $a$  就是湮灭算符 (annihilation operator)
- $a^\dagger$  就是产生算符 (creation operator)

同时定义粒子数算符

$$\begin{aligned} N &= a^\dagger a = \left( \frac{m\omega}{2\hbar} \right) \left( x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) + \left( \frac{i}{2\hbar} \right) [x, p] \\ &= \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

也就是说

$$H = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right)$$

很容易看出  $N$  的本征态就是能量的本征态, 其本征值和能量的量子数是一样的

$$N |n\rangle = n |n\rangle$$

$a$  和  $a^\dagger$  的对易关系可以直接用  $x$  和  $p$  的基本对易关系算出

$$[a, a^\dagger] = 1$$

粒子数算符和产生湮灭算符的对易关系：

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger a a - a a^\dagger a = [a^\dagger, a] a = -a$$

同理  $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ 。

由对易关系可以推出

$$Na^\dagger |n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger) |n\rangle = (n+1)a^\dagger |n\rangle$$

同理

$$Na |n\rangle = (n-1)a |n\rangle$$

这里可以发现  $a^\dagger$  作用之后粒子数加一,  $a$  作用之后粒子数减一, 所以产生和湮灭算符的称呼也是十分贴切。

这就说明  $a^\dagger |n\rangle$  和  $|n+1\rangle$  应该只差一个系数  $c$

$$a |n\rangle = c |n-1\rangle$$

而

$$n = \langle n | a^\dagger a |n\rangle = |c|^2$$

所以  $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$

同理  $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$

从真空态中产生  $n$  个粒子就可以写作

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

# 单模光的量子化

边界条件:  $z = 0$  和  $z = L$  处为理想导体

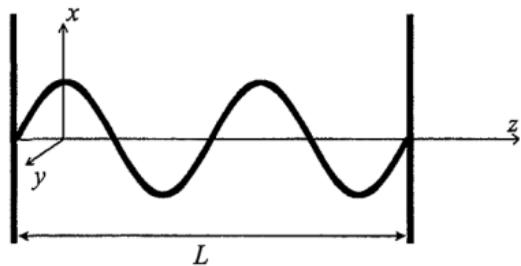


Figure 1: 单模光示意图

假设电场随时间的变化因子为  $q(t)$ , 且只考虑单频  $\omega$

$$E_x(z, t) = \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz)$$

$$B_y(z, t) = \left( \frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(kz)$$

其能量就是单位质量的谐振子的形式

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left[ \epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right] = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

同样定义的  $a^\dagger$  和  $a$  就是光子的产生和湮灭算符

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{ip}{\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{ip}{\omega} \right)$$

# 量子力学和量子光学基本知识

---

## 相干态 (Coherent State)

## 产生湮灭算符的本征态

前面看到能量本征态并不是产生湮灭算符的本征态。但我们可以用能量本征态（或者说粒子数表象下）对湮灭算符的本征态展开

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

那么根据前面讨论的性质

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

系数就需要满足

$$C_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0$$

再通过归一化定出系数

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= 1 = |C_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{\alpha^{*n} \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'}} \langle n | n' \rangle \\ &= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} \end{aligned}$$

最后得到

$$C_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)$$

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

顺便  $\langle \tau | \alpha \rangle = \exp[-1/2(|\tau|^2 + |\alpha|^2) + \tau^* \alpha]$

## 真空态的位移 (Displacement)

结合前面的两个式子

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

可以得到

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \end{aligned}$$

接下来变一个形式。注意到

$$\exp(-\alpha^* a) |0\rangle = |0\rangle$$

所以

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}$$

### Theorem (Baker-Hausdorff Formula)

If  $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$ , then

$$e^{A+B} = e^{-[A,B]/2} e^A e^B$$

所以

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$$

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$$

Unitary

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = [D(\alpha)]^{-1}$$

Displacement of  $a^\dagger$  and  $a$

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha$$

$$D^{-1}(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$$

证明略

两个位移算符 ( $D(\alpha)$  和  $D(\beta)$ ) 作用

令  $A = \alpha a^\dagger - \alpha^* a$ ,  $B = \beta a^\dagger - \beta^* a$ , 注意到

$$[A, B] = \alpha\beta^* - \alpha^*\beta = 2i\Im(\alpha\beta^*)$$

运用 Baker-Hausdorff 公式可以得到

$$\begin{aligned} D(\alpha)D(\beta) &= e^A e^B \\ &= e^{[A, B]/2} e^{A+B} \\ &= \exp[i\Im(\alpha\beta^*)] D(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

所以  $D(\alpha)D(\beta)$  和  $D(\alpha + \beta)$  只差一个相位。如果  $\alpha\beta^*$  是一个实数, 那就完全一样了。

# 量子力学和量子光学基本知识

---

## 纠缠 (Entanglement)

由两个粒子组成的复合体系的量子态，如果能够表示为每个粒子的量子态的乘积，就是可分离态；反之就是纠缠态。

例如  $\psi = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$  是可分离态， $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2)$  就是纠缠态。

### 经典的关联：伯特曼的袜子

Bertlmann 总是穿两种不同颜色的袜子，而且其中一只一定是粉色的。所以如果你看到他其中一只不是粉色的，那另外一只一定不是粉色的；如果看到其中一只不是绿色的，那另外一只一定是粉色的。

### 量子的关联

以  $\Psi$  为例，测量一个粒子的自旋  $z$  分量，另一个粒子的自旋  $z$  分量也随之确定。

量子的关联与经典的有些类似，但并不完全相同。因为如果是沿着  $x$  方向的测量，纠缠依然存在。

贝尔不等式的违反表明，定域的隐变量理论与量子力学是矛盾的。

## 贝尔基 (Bell Basis)

我们在量子力学里学过，如果把  $\{\sigma_{1x}\sigma_{2x}, \sigma_{1y}\sigma_{2y}\}$  的共同本征态在  $(\sigma_{1z}, \sigma_{2z})$  表象下写出，就得到了贝尔基。为了和后面连接方便，我们用  $|0\rangle$  表示自旋向下，用  $|1\rangle$  表示自旋向上。

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B)$$

$$|\Psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B)$$

$$|\Phi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B - |1\rangle_A |1\rangle_B)$$

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$$

贝尔基在处理纠缠问题的时候会非常有用。

## 量子隐形传态 (Teleportation)

假设 Alice 想给 Bob 传一个光子态

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$$

但是 Alice 不知道系数  $c_0$  和  $c_1$  (如果知道就好办了)。但好在他们有一个共享的纠缠态

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$$

下标 AB 表示 Alice 和 Bob. 我们写出  $|\psi\rangle$  和  $|\Psi_{AB}\rangle$  的总态  $|\Phi_{AB}\rangle$

$$\begin{aligned} |\Phi_{AB}\rangle &= |\psi\rangle |\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_0 |0\rangle |0\rangle_A |0\rangle_B + c_0 |0\rangle |1\rangle_A |1\rangle_B + c_1 |1\rangle |0\rangle_A |0\rangle_B + c_1 |1\rangle |1\rangle_A |1\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle (c_0 |0\rangle_B + c_1 |1\rangle_B) + |\Phi^-\rangle (c_0 |0\rangle_B - c_1 |1\rangle_B) \\ &\quad + |\Psi^+\rangle (c_0 |1\rangle_B + c_1 |0\rangle_B) + |\Psi^-\rangle (c_0 |1\rangle_B - c_1 |0\rangle_B)] \end{aligned}$$

其中

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle_A + |1\rangle|1\rangle_A)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle_A - |1\rangle|1\rangle_A)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle_A + |1\rangle|0\rangle_A)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle_A - |1\rangle|0\rangle_A)$$

它们就是贝尔基，但是注意角标已经变成待传态  $|\psi\rangle$  和一半的纠缠态  $|\rangle_A$  的混合了。

值得注意的是到目前为止，我们只是把两个态写在了一起并做了一些数学上的操作，没有涉及物理的操作。

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle (c_0|0\rangle_B + c_1|1\rangle_B) + |\Phi^-\rangle (c_0|0\rangle_B - c_1|1\rangle_B) \\ + |\Psi^+\rangle (c_0|1\rangle_B + c_1|0\rangle_B) + |\Psi^-\rangle (c_0|1\rangle_B - c_1|0\rangle_B)]$$

Alice 在上述  $|\psi\rangle$  和  $|\chi\rangle_A$  构成的贝尔基下，对进行投影测量。四个贝尔态  $|\Phi^\pm\rangle$  和  $|\Psi^\pm\rangle$  的每一个都会以  $\frac{1}{4}$  的概率出现。

假设 Alice 得到并且知道她得到了  $|\Phi^+\rangle$  态，那么 Bob 的系统就必然是  $c_0|0\rangle_B + c_1|1\rangle_B$ 。然后 Alice 通过经典的信道告诉了 Bob 她得到了  $|\Phi^+\rangle$  态，那 Bob 就知道他已经得到了目标态，传态完成。

假设 Alice 得到了  $|\Psi^+\rangle$  态并告诉了 Bob，那 Bob 需要利用量子逻辑门对他的态做一个 flip 操作：

$$|1\rangle_B \rightarrow |0\rangle_B, \quad |0\rangle_B \rightarrow |1\rangle_B$$

这样 Bob 也得到了目标态，传态完成。其他的两个情况同理，都需要借助一些量子逻辑门的操作。

## 量子光学的分束器

---

经典情形下，我们假设反射率  $r$  和透射率  $t$ :

$$\varepsilon_2 = r\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 = t\varepsilon_1$$

假设理想情况，能量守恒满足，所以

$$|r|^2 + |t|^2 = 1$$

这似乎没什么毛病，我们在光学计算菲涅耳公式，以及在量子力学中算势垒隧穿的时候都是这么干的。

那我们试着把这个关系迁移到单光子分束器中。

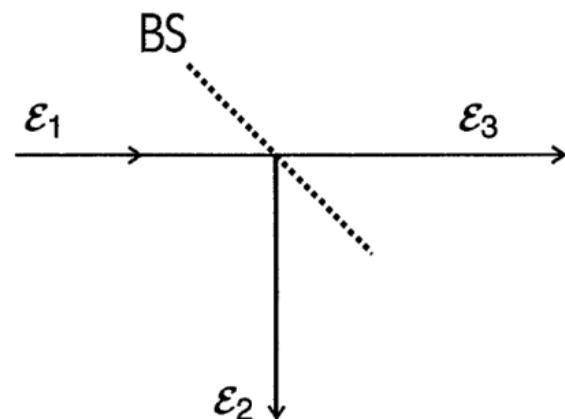


Figure 2: 经典图像下的分束器示意图

先只考虑一个光子的情形。如果我们假设

$$a_2 = r a_1$$

$$a_3 = t a_1$$

那我们很快发现

$$[a_2, a_2^\dagger] = |r|^2 [a_1, a_1^\dagger] = |r|^2 \neq 1$$

同样  $a_3$  的对易关系也不满足。说明这样的假设是不对的。为什么？

其实是因为还有一个“隐藏”的量子态没有被考虑。

如果你熟悉量子计算就会知道，在量子计算中量子比特是不能凭空多出来的，初始的比特数和末态的比特数必须相等，需要由辅助比特。这里也是一样的道理。

先只考虑一个光子的情形。如果我们假设

$$a_2 = r a_1$$

$$a_3 = t a_1$$

那我们很快发现

$$[a_2, a_2^\dagger] = |r|^2 [a_1, a_1^\dagger] = |r|^2 \neq 1$$

同样  $a_3$  的对易关系也不满足。说明这样的假设是不对的。为什么？

其实是因为还有一个“隐藏”的量子态没有被考虑。

如果你熟悉量子计算就会知道，在量子计算中量子比特是不能凭空多出来的，初始的比特数和末态的比特数必须相等，需要由辅助比特。这里也是一样的道理。

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

利用对易关系和能量守恒就能得到

$$|r'| = |r|, |t| = |t'|, |r|^2 + |t|^2 = 1, r^*t' + r't^* = 0, \text{ and } r^*t + r't'^* = 0.$$

具体的数值还是和分束器的物理性质有关。对于一个只有一层电介质的 50 : 50 分束器,

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 + ia_1)$$
$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ia_0 + a_1)$$

对于没有光子的真空态，我们可以把分束的过程写作

$$|0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{\text{BS}} |0\rangle_2 |0\rangle_3$$

则入射一个光子的过程可以表示为

$$a_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1 = |0\rangle_0 |1\rangle_1 \xrightarrow{\text{BS}} \frac{1}{\sqrt{2}} (i a_2^\dagger + a_3^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (i |1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3)$$

注意这是一个纠缠态。如果入射一个相干态，就没有纠缠发生

$$\begin{aligned} |0\rangle_0 |\alpha\rangle_1 &\xrightarrow{\text{BS}} \exp \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (i \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger) - \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} (-i \hat{a}_2 + \hat{a}_3) \right] |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= \exp \left[ \left( \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_2^\dagger - \left( \frac{-i\alpha^*}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_2 \right] \exp \left[ \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_3^\dagger - \left( \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_3 \right] |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \end{aligned}$$

## 逻辑门

---

# 逻辑门

---

## 量子逻辑门

## 量子比特和量子逻辑门

先选定两个正交的量子态作为  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态。  
一个量子比特可以表示为：

$$|\psi\rangle = \mu|0\rangle + \nu|1\rangle$$

其中  $\mu$  和  $\nu$  都是复数。但这并不意味着整个比特有 4 个自由度。 $\mu$  和  $\nu$  需要满足归一化条件，并且量子态的绝对相位是没有意义的，只有相对的相位有意义。这样只有两个自由度，我们可以把量子比特改写为

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|1\rangle$$

量子逻辑门可以理解为一个矩阵操作。例如 X 门 (Pauli-X gate / Bit-flip gate)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \\ \mu \end{bmatrix}$$

也就是上面提到的 flip 操作

$$\mu|0\rangle + \nu|1\rangle \xrightarrow{X} \nu|0\rangle + \mu|1\rangle$$

再比如 Z 门 (Pauli-Z gate / Sign-flip gate) 可以实现符号翻转

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ -\nu \end{bmatrix}$$
$$\mu|0\rangle + \nu|1\rangle \xrightarrow{Z} \mu|0\rangle - \nu|1\rangle$$

## 多（双）比特逻辑门

如果一个量子逻辑门集合要完备，那一定要涉及多量子比特的操作，尤其是在基于量子光学的量子计算机中。其中最重要的多比特逻辑门是 CNOT 门 (Controlled-NOT gate)

为了用矩阵表示两个量子比特的操作，我们需要把两个量子比特写成一列

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(0) + 0(0) + 0(1) + 0(0) \\ 0(0) + 1(0) + 0(1) + 0(0) \\ 0(0) + 0(0) + 0(1) + 1(0) \\ 0(0) + 0(0) + 1(1) + 0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

那么第一个比特为控制比特，第二个比特为受控比特的 CNOT 门的矩阵形式就是

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 逻辑门

---

## 逻辑门的量子光学实现

基于光学方法的量子计算，优点有很多

- 光与环境相互作用小，不易退相干
- 光子的偏振和路径信息都可以用来编码量子比特
- 单比特操作简单

但是光子之间几乎没有相互作用，没有办法实现两量子比特直接的逻辑门操作。

量子态的选择直接决定了各个逻辑门的设计。好的量子态可以大大简化逻辑门的操作。

下面将介绍一种利用相干态的量子计算逻辑门设计

$$|0\rangle \equiv |-\alpha\rangle, \quad |1\rangle \equiv |\alpha\rangle$$

并且取  $\alpha \in \mathbb{R}$ . 虽然它们不是严格正交的，但是

$$\langle -\alpha | \alpha \rangle = e^{-2|\alpha|^2}$$

只要  $\alpha > 3$  就可以有不错的正交性。

相干态的相位概率分布 ( $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ )

$$\mathcal{P}(\varphi) \approx \left(\frac{2|\alpha|^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp[-2|\alpha|^2(\varphi - \theta)^2]$$

测量  $|0\rangle$  态和  $|1\rangle$  态：有一个振子提供参考相位，利用同步检波测量。

这样，我们只需要把量子态的相位延迟一个  $\pi$  就能达到 X 门的目的。算符写作

$$X = \exp(i\pi a^\dagger a)$$

类似定态薛定谔方程随时间演化的  $\exp(iEt/\hbar)$  因子。

其实原文并没有讲清楚 qwq

首先需要有一个 cat state

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|-\sqrt{2}\alpha\rangle + |\sqrt{2}\alpha\rangle)$$

经过 50:50 的分束器, 就得到纠缠态

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|-\alpha, -\alpha\rangle + |\alpha, \alpha\rangle)$$

用它作为之前讲的  $\Psi_{AB}$ , 对一个量子态  $\mu|-\alpha\rangle + \nu|\alpha\rangle$  做量子隐形传态的操作, 就能得到 4 种结果

$$\mu|-\alpha\rangle + \nu|\alpha\rangle$$

$$\mu|-\alpha\rangle - \nu|\alpha\rangle$$

$$\mu|\alpha\rangle + \nu|-\alpha\rangle$$

$$\mu|\alpha\rangle - \nu|-\alpha\rangle$$

我们可以根据测量得到了哪一个贝尔态知道得到了哪一种结果。

- 对于后两种情况, 可以使用一次 X 门操作变成前两种情况
- 对于第一种, 相当于没有做操作, 我们就让它再次执行这一操作
- 第二种就是我们想要的 Z 门结果

我们把这些操作记为

$$Z = T_X^p$$

$T$  是 teleportation 操作, 下标  $X$  表示 teleportation 用到了 X 门修正,  $p$  表示需要重复执行  $p$  次操作。

# Phase Rotation Gate ( $Z_\theta$ )

核心思想：先位移、再投影测量

利用两个位移算符先后作用的公式

$$\begin{aligned} D\left(\frac{i\theta}{4\alpha}\right) (\mu|- \alpha\rangle + \nu|\alpha\rangle) \\ = e^{-i\theta/4} \mu \left| -\alpha \left(1 - \frac{i\theta}{4\alpha^2}\right) \right\rangle + e^{i\theta/4} \nu \left| \alpha \left(1 + \frac{i\theta}{4\alpha^2}\right) \right\rangle \end{aligned}$$

利用前面计算得到的投影关系

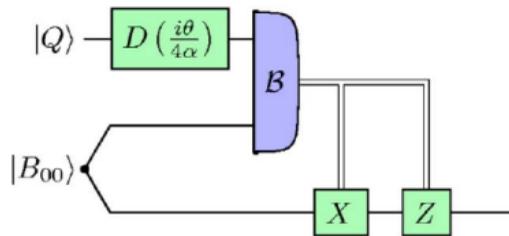
$$\langle \tau | \alpha \rangle = \exp \left[ -1/2 (|\tau|^2 + |\alpha|^2) + \tau^* \alpha \right]$$

可以得到

$$\begin{aligned} \left\langle \pm\alpha \mid \pm\alpha \left(1 \pm \frac{i\theta}{4\alpha^2}\right) \right\rangle &= e^{\pm i\theta/4} e^{-\theta^2/32\alpha^2} \\ \left\langle \mp\alpha \mid \pm\alpha \left(1 \pm \frac{i\theta}{4\alpha^2}\right) \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

所以位移算符和  $T_X$  算符先后作用的结果：

$$\begin{aligned} T_X D\left(\frac{i\theta}{4\alpha}\right) (\mu|- \alpha\rangle + \nu|\alpha\rangle) \\ = e^{-\theta^2/32\alpha^2} \left( e^{-i\theta/2} \mu|- \alpha\rangle \pm e^{i\theta/2} \nu|\alpha\rangle \right) \end{aligned}$$



获得了正号还是负号一样可以通过得到的贝尔态确定。再根据需要加一个 Z 门就可以修正掉。最终得到的  $Z_\theta$  门用矩阵写出来就是

$$Z_\theta = \begin{bmatrix} \exp(-i\theta/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\theta/2) \end{bmatrix}$$

# Controlled Phase Gate

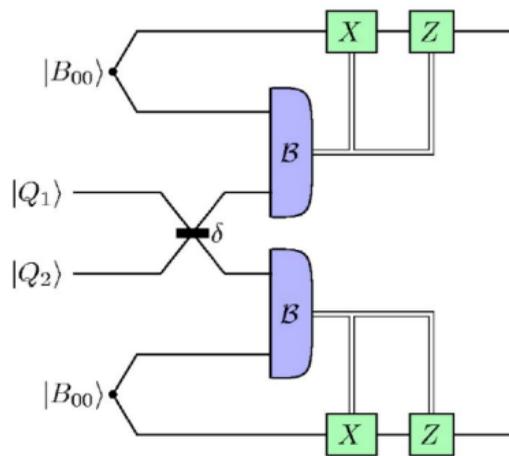
考虑在分束器同时入射两个相干态 ( $\beta$  和  $\gamma$  取  $\pm\alpha$ )

$$U_{ab}|\gamma\rangle_a|\beta\rangle_b = \left| \cos\frac{\theta}{2}\gamma + i\sin\frac{\theta}{2}\beta \right\rangle_a \left| \cos\frac{\theta}{2}\beta + i\sin\frac{\theta}{2}\gamma \right\rangle_b$$

其中  $\cos^2\frac{\theta}{2}$  是分束器的反射率,  $\sin^2\frac{\theta}{2}$  是透射率。如果我们再次用 teleportation + X gate 的操作即  $T_X$ , 在计算过程中再利用小角度近似, 可以得到

$$\begin{aligned} & T_{Xa}T_{Xb}U_{ab}(\nu|-\alpha\rangle_a|-\alpha\rangle_b + \mu|\alpha\rangle_a|-\alpha\rangle_b \\ & \quad + \tau|-\alpha\rangle_a|\alpha\rangle_b + \gamma|\alpha\rangle_a|\alpha\rangle_b) \\ & = e^{-\theta^2\alpha^2/4} \left( e^{i\theta\alpha^2}\nu|-\alpha\rangle_a|-\alpha\rangle_b \pm e^{-i\theta\alpha^2}\mu|\alpha\rangle_a|-\alpha\rangle_b \right. \\ & \quad \left. \pm e^{-i\theta\alpha^2}\tau|-\alpha\rangle_a|\alpha\rangle_b + e^{i\theta\alpha^2}\gamma|\alpha\rangle_a|\alpha\rangle_b \right) \end{aligned}$$

获得了正号还是负号一样可以通过得到的贝尔态确定。这样再根据需要加一个 Z 门修正, 就可以得到 Controlled Phase Gate 的效果。



可以证明如果取  $\phi = 2\theta\alpha^2 = \pi/2$ , 则与 CNOT 门是 locally equivalent 的

## 其他量子计算实现

---

1. 可扩展的具有良好特性的量子比特系统
2. 能够制备量子比特到某个基准态
3. 具有足够长的相干时间来完成量子逻辑门操作
4. 能够实现一套通用量子逻辑门操作
5. 能够测量量子比特
6. 能够使飞行量子比特和静止量子比特互相转化
7. 能够使飞行量子比特准确地在不同的地方之间传送

- 利用离子阱实现量子计算是 Cirac 和 Zoller 首先提出的。
- 在该体系中, Qubit 是束缚在线性离子阱中单个离子的两个内能级。
- 单 Qubit 的么正变换可以通过寻址激光束与单个离子的共振相互作用来完成。
- 2 个 Qubit 的受控么正变换需要利用失谐的激光束先后照射两个需要相互作用的离子, 借助与整体离子串的声子相互作用来完成。

## 优势

- 相干时间较长
- 较高的制备和读出量子比特的效率

## 劣势

- 由于过程需要大量离子的参与, 操作过程更易受到外电场等退相干因素的影响
- 操作的效率非常低
- 难以集成

- Deutsch 等人提出了利用光格子中的中性原子进行量子计算的方案。
- 利用激光冷却技术可以把原子冷却到运动基态，并使其被俘获在光格子中
- 通过调整外部激光束的尺寸、极化方向、能量密度可以精确控制光学格点的维度、深度、形式、位置等参数

## 优势

- 相干时间较长
- 可扩展性
- 形式丰富、直接的、长程的相互作用

## 劣势

- 高集成和高保真难以兼得
- 初态制备效率低
- 大规模的原子阵列里单比特寻址未实现

- 超导量子计算的核心单元是一种“超导体—绝缘体—超导体”三层结构的约瑟夫森结电子器件
- 其中间绝缘层的厚度很薄，形成一个势垒，库珀对能够隧穿该势垒形成超导电流
- 约瑟夫森结电路中存在宏观量子相干现象

## 优势

- 可定制能级结构
- 可扩展性强

## 劣势

- 强烈的退相干问题

# Many Others

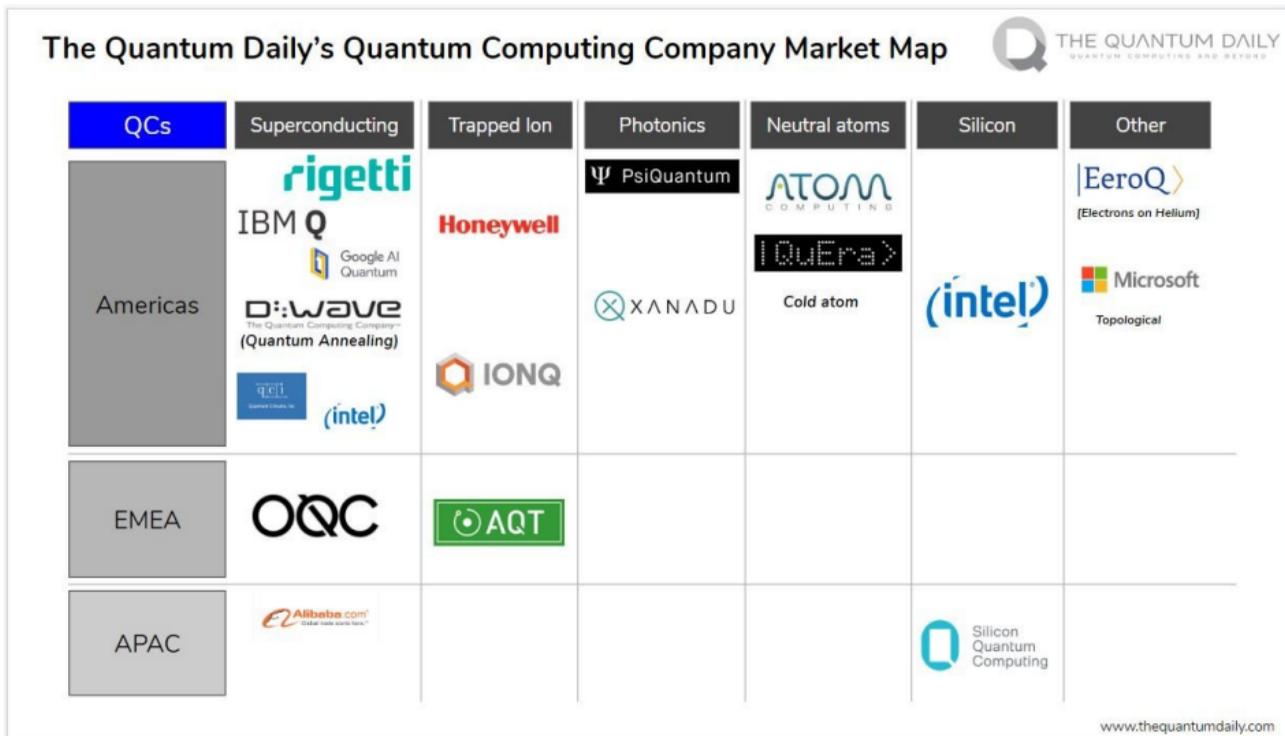


Figure 3: 量子计算市场版图

-  Gerry, Christopher and Peter Knight (Nov. 22, 2004). Introductory Quantum Optics. 1st edition. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press. 332 pp. ISBN: 978-0-521-52735-4.
-  Scully, Marlan O. and M. Suhail Zubairy (Sept. 4, 1997). Quantum Optics. 1st edition. Cambridge University Press. 913 pp.
-  CNOT Gate Tutorial with Code (2022). Quantum Computing UK. URL: <https://quantumcomputinguk.org/tutorials/controlled-not-gate-program> (visited on 04/09/2022).
-  量子逻辑门—pyQPanda 文档 (2022). URL: <https://pyqpanda-tutorial.readthedocs.io/zh/latest/QGate.html> (visited on 05/21/2022).
-  Ralph, T. C. et al. (Oct. 20, 2003). “Quantum Computation with Optical Coherent States” . In: Physical Review A 68.4, p. 042319. ISSN: 1050-2947, 1094-1622. DOI: 10.1103/PhysRevA.68.042319.

-  TQD Exclusive (May 21, 2020). TQD Exclusive: A Detailed Review of Qubit Implementations. The Quantum Insider. URL: <https://thequantuminsider.com/2020/05/21/tqd-exclusive-a-detailed-review-of-qubit-implementations-for-quantum-computing/> (visited on 04/09/2022).
-  薛飞, 杜江峰 (Oct. 20, 2004). “量子计算的物理实现”. In: 物理 33.10, pp. 0–0. ISSN: 0379-4148.
-  方, 粮 et al. (2012). “量子计算机: 量子算法与物理实现”. In: 计算机工程与科学 34.08, pp. 32–43. ISSN: 1007-130X.

**Thank You!**